Lógica Matemática

APRESENTAÇÃO

Você já ouviu falar do teorema de Pitágoras? E de Euclides? Provavelmente, sim. Mas de onde eles vieram, em que época foram estabelecidos e para que servem, afinal? O desenvolvimento da lógica matemática ocorreu na Idade das Trevas, por volta de 300 a.C.

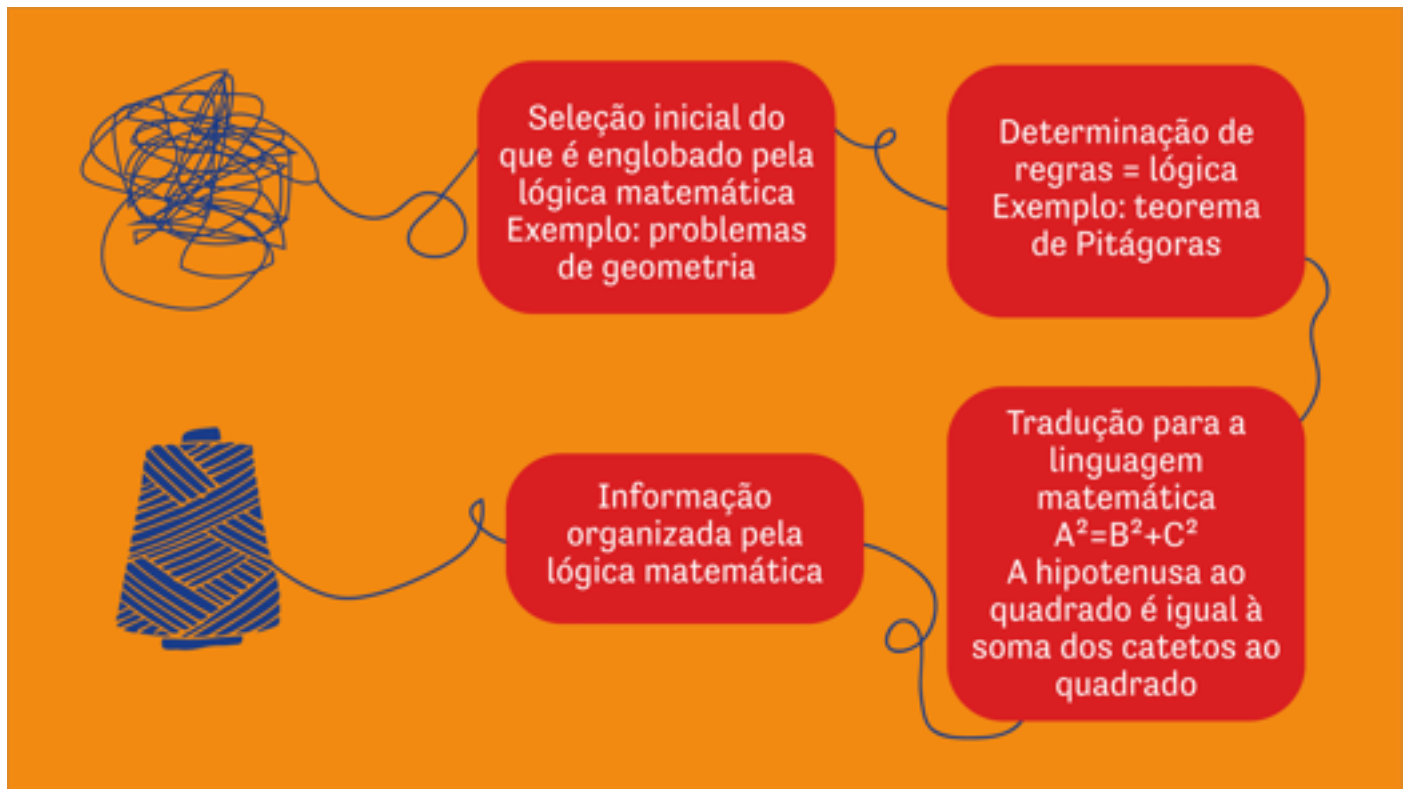
Nesta Unidade de Aprendizagem, você vai entender como foi esse desenvolvimento ao longo do tempo e ver que as explicações e os argumentos matemáticos lógicos têm uma origem..

Bons estudos.

Ao final desta Unidade de Aprendizagem, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Relacionar lógica, matemática, linguagem e aplicações.
- Identificar o uso do raciocínio lógico para provar teoremas matemáticos.
- Desenvolver a capacidade de solução de problemas matemáticos a partir da lógica.

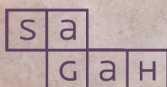
INFOGRÁFICO

Observe, no Infográfico a seguir, que a lógica é o conjunto de regras para definir uma conclusão sobre uma premissa.

CONTEÚDO DO LIVRO

A matemática é uma ciência que envolve muito mais do que números, ela é antes de tudo uma linguagem e expressa as correlações que fazemos no cotidiano. Isso não é algo recente e vem ao longo da história da humanidade tomando formas mais elaboradas. A lógica é essencial para desenvolvermos o pensamento crítico e refletir sobre as afirmações com as quais nos deparamos.

No capítulo Lógica Matemática, você vai conhecer a linguagem matemática, percebendo sua aplicação lógica em diversas situações, para além de compreender como ocorre a prova de teoremas matemáticos, você poderá acompanhar a solução de problemas a partir da lógica. Este assunto será tão importante para sua vida acadêmica quanto profissional e pessoal.

RACIOCINIO LÓGICO

Cristiane da Silva

Lógica matemática

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste texto, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Relacionar lógica, matemática, linguagem e aplicações.
- Identificar o uso do raciocínio lógico para provar teoremas matemáticos.
- Desenvolver a capacidade de solução de problemas matemáticos a partir da lógica.

Introdução

Estamos habituados a pensar a matemática como uma ciência meramente numérica, pois, de modo geral, é assim que aprendemos ao longo dos anos em nossas experiências escolares. No entanto, a matemática é muito mais do que isso. Enquanto seres humanos racionais, usamos a racionalidade para dar força à palavra, temos o poder de convencimento dos argumentos corretos e a capacidade de mobilizar pessoas em prol de uma determinada causa, e esses são apenas alguns dos objetivos da lógica. A matemática pode ser entendida como uma ciência sustentada pelas correlações que fazemos e nos permite determinar e comprovar a existência ou não de determinado fenômeno ou situação.

Neste capítulo, você vai conhecer o surgimento da lógica, sua relação com a matemática e a linguagem que utilizamos até hoje. Além disso, vai ver o uso do raciocínio lógico na prova de teoremas matemáticos e em problemas práticos com os quais podemos nos deparar no cotidiano.

1 Uma linguagem matemática

Você já parou para pensar por que determinadas constatações matemáticas foram elaboradas de certa forma? Por exemplo, por que o sistema de numeração que usamos até hoje é decimal? Bom, a matemática, como dissemos, é sustentada pelas correlações que fazemos; assim, o sistema de numeração decimal foi concebido na base 10 porque temos dez dedos nos pés e nas mãos.

As descobertas matemáticas foram motivadas pelas necessidades humanas ao longo da história — como exemplo, podemos pensar no controle do tempo, nos ciclos da lua, na frequência das marés, entre outros.

As descobertas da matemática foram e continuam sendo extremamente vitais para o progresso da sociedade, não apenas sob um aspecto numérico, mas porque fornecem elementos e subsidiam as argumentações. Machado e Cunha (2019) mencionam que a busca da competência na argumentação, da compreensão das razões próprias dos indivíduos e dos outros para a tomada de posição diante de acontecimentos, nas escolhas de pressupostos e nas tomadas de decisão, são princípios da **lógica**, que se origina como disciplina de Aristóteles, entre 300 e 400 anos a.C. Aristóteles se preocupava com as formas adequadas de argumentação e, por isso, seus estudos constituem a lógica formal — sua busca foi por explicitar leis ou regras que garantissem uma argumentação competente (MACHADO; CUNHA, 2019).

Você, por exemplo, já teve ter utilizado a expressão "é lógico!" em meio a uma conversa sobre política, economia, projetos pessoais ou sobre o futuro da humanidade. De modo geral, pretendemos pensar e agir logicamente e quase sempre utilizamos a expressão "é lógico!" para nos referirmos a algo que parece evidentemente certo ou fácil de ser defendido. É comum, portanto, surgirem razões que procuram fundamentar a conclusão enunciada na afirmação inicial, e esse encadeamento de razões que devem conduzir a uma conclusão é um argumento — as razões alegadas são as premissas do argumento. (MACHADO; CUNHA, 2019). Vamos considerar o seguinte exemplo, tomado de Machado e Cunha (2019, p. 2016):

> "É lógico que Pedro será aprovado nos exames, pois ele é inteligente e estuda muito e todos os alunos inteligentes e estudiosos são aprovados."

Temos, no caso, o **argumento** a seguir.

Conclusão	Pedro será aprovado.
Razões (premissas)	Pedro é inteligente. Pedro estuda muito. Todos os alunos inteligentes e estudiosos são aprovados.

Um **argumento** é constituído, portanto, de uma ou mais **premissas** e de uma **conclusão**. Na linguagem corrente, a conclusão de um argumento pode ser enunciada inicialmente, como no exemplo anterior, seguindo-se o encadeamento das premissas, mas também pode ser enunciada após as premissas, como no exemplo a seguir (MACHADO; CUNHA, 2019, p. 16):

"Como a gasolina é extraída do petróleo, que é importado, e todos os produtos importados são caros, a gasolina é cara."

Temos, então, o seguinte argumento:

Premissas	A gasolina é extraída do petróleo. O petróleo é importado. Todos os produtos importados são caros.
Conclusão	A gasolina é cara.

Nesse contexto, Scheinerman (2006, p. 1) afirma que:

> [...] as pedras angulares da matemática são a definição, o teorema e a prova. As definições especificam com precisão os conceitos em que estamos interessados, os teoremas afirmam exatamente o que é verdadeiro sobre esses conceitos e, as provas demonstram, de maneira irrefutável, a verdade dessas asserções.

Proposições são palavras ou símbolos que expressam um pensamento com um sentido completo e indicam afirmações de fatos ou de ideias. Tais afirmações assumem valores lógicos, que podem ser verdadeiros ou falsos, mas não ambos. Usualmente, são utilizadas as letras **p** e **q** para representar uma proposição. Observe, a seguir, algumas proposições e seu valor verdade (GOUVEIA, 2018).

- O Brasil está localizado na América do Norte (proposição falsa).
- A Terra é redonda (proposição verdadeira).
- $\frac{1}{4} = 0{,}25$ (proposição verdadeira).
- $\sqrt{3} = 1$ (proposição falsa).

Na matemática, atuamos como se fossemos legisladores, fixando critérios específicos. A exemplo, podemos mencionar a decisão por criar universidades e institutos federais, o que pode ser um programa governamental no intuito de oferecer maior acesso ao ensino público para a sociedade — para tanto, são fixados critérios específicos. A diferença consiste no fato de que as leis podem permitir certa ambiguidade, enquanto uma definição matemática deverá ser absolutamente clara (SCHEINERMAN, 2006). Acompanhe, a seguir, um exemplo matemático por meio de uma definição proposto por Scheinerman (2006).

Exemplo

Um número é chamado primo ou par desde que satisfaça condições precisas, sem ambiguidade.

Definição (par)

Um inteiro é chamado par se é divisível por 2.

Embora pareça claro, não o é totalmente: a questão é que essa definição contém termos que ainda não foram definidos, em particular, inteiro e divisível. De acordo com Scheinerman (2006), se quisermos ser muito detalhistas, podemos alegar que ainda não definimos o termo 2. Cada um desses termos — inteiro, divisível e 2 — pode ser definido por meio de conceitos mais simples, e não podemos ganhar esse jogo inteiramente. Se cada termo for definido por meio de conceitos mais simples, estaremos continuamente em busca de definições e, assim, chegaremos a um momento em que diremos: "Este termo é indefinível, mas acreditamos entender o que ele significa".

Definição (ímpar)

Um inteiro a é chamado ímpar desde que haja um inteiro x tal que $a = 2x + 1$.

Assim, o número 7, por exemplo, é ímpar porque podemos escolher $x = 3$ na definição, obtendo $7 = 2 \times 3 + 1$. A definição fornece um critério claro, sem ambiguidade, para determinar se um inteiro é ímpar. Além disso, a definição de ímpar não afirma que um inteiro é ímpar desde que não seja par. Isso naturalmente é verdade, e existe prova — "todo inteiro é ímpar ou par, mas não ambos".

Até aqui, conhecemos a linguagem matemática, sua relação com a lógica e algumas aplicações. Na próxima seção, aprofundaremos esse estudo identificando o uso do raciocínio lógico para provar teoremas matemáticos.

2 Raciocínio lógico

Veremos, agora, como o raciocínio lógico contribui para a prova de teoremas matemáticos, mas, antes, é importante ter clara a definição de teorema. De acordo com Scheinerman (2006), teorema é uma afirmação declarativa sobre matemática para a qual existe uma prova. As afirmações feitas por matemáticos podem ser classificadas em três categorias:

1. as afirmações que sabemos serem verdadeiras e que podemos provar, chamadas de **teoremas**;
2. as afirmações que não temos como garantir sua veracidade, chamadas de **conjeturas**;
3. as afirmações falsas, que chamamos de **erros**, e os **absurdos**, ou seja, sentenças que não têm sentido.

Como vimos anteriormente, em matemática, postulamos asserções sobre noções matemáticas e procuramos provar que as ideias estão corretas. Uma prova pode ter diferentes significados conforme a área do conhecimento. Por exemplo, para a ciência, ela surge da experimentação; para o direito, a verdade é avaliada por um julgamento e decidida por um juiz e/ou júri; no esporte, a verdade é a decisão dos juízes em função da capacidade dos indivíduos. Na matemática, embora seja dada importância para experimentos, a verdade é demonstrada mediante uma prova de verdade absoluta (SCHEINERMAN, 2006).

Conforme Scheinerman (2006), os matemáticos usam a linguagem cotidiana de maneira diferente das pessoas em geral, atribuindo significados especiais. A seguir, confira algumas dessas expressões.

Se/Então

Na afirmação “se A, então B”, A é chamado hipótese e B de conclusão. Muitos teoremas podem ser expressos dessa forma. Por exemplo, o teorema “A soma de dois números inteiros pares é par” pode ser reescrito como “Se x e y são inteiros pares, então $x + y$ também é par”. É importante destacar que a afirmação “Se A, então B” significa que sempre que a condição A for verdadeira, a condição B também o será (SCHEINERMAN, 2006).

Na afirmação “se A, então B”, é possível ter a condição A verdadeira ou falsa, e a condição B verdadeira ou falsa, como mostra o Quadro 1 a seguir.

Quadro 1. Se A, então B

Condição A	Condição B	
Verdadeira	Verdadeira	Possível
Verdadeira	Falsa	Impossível
Falsa	Verdadeira	Possível
Falsa	Falsa	Possível

Fonte: Adaptado de Scheinerman (2006).

O que vimos até agora é que, se A é verdadeira, B também deverá ser, mas se A não é verdadeira, então nenhuma alegação sobre B é sustentada por “Se A, então B”. Ou seja, a afirmação “Se A, então B” assegura que a condição B é verdadeira sempre que A o for, mas não faz qualquer referência a B quando A é falsa (SCHEINERMAN, 2006).

Se e somente se

Muitos teoremas também podem ser expressos na forma “se então”, e alguns são da forma “Se A então B, e se B então A”. A título de exemplo, vamos pensar na seguinte afirmação verdadeira:

Se um inteiro x é par, então $x + 1$ é ímpar, e se $x + 1$ é ímpar, então x é par.

Essa afirmação é excessiva, ou seja, usa mais palavras do que o necessário. Podemos escrevê-la de maneira mais sucinta usando a expressão: **se e somente se**. Observe:

Um inteiro x é par se e somente se $x + 1$ é ímpar.

Scheinerman (2006) destaca que, na afirmação “A se e somente se B”, as condições A e B podem ser, cada uma delas, verdadeira ou falsa, como mostra o Quadro 2.

Quadro 2. A se e somente se B

Condição A	Condição B	
Verdadeira	Verdadeira	Possível
Verdadeira	Falsa	Impossível
Falsa	Verdadeira	Impossível
Falsa	Falsa	Possível

Fonte: Adaptado de Scheinerman (2006).

Ambas as condições A e B devem ser verdadeiras ou falsas. Scheinerman (2006, p. 12) retoma o exemplo da afirmação “Um inteiro x é par se e somente se $x + 1$ é ímpar” para explicar o seguinte:

> “A condição A é ‘x é par’ e a condição B é ‘$x + 1$’ é ímpar”.

Para alguns inteiros (por exemplo, $x = 6$), A e B são ambas verdadeiras (6 é par e 7 é ímpar), mas, para outros inteiros (por exemplo, $x = 9$), ambas as condições são falsas (9 não é par e 10 não é ímpar).

E, ou e não

Em matemática, o uso de “e” significa que ambas as afirmações são verdadeiras. Para ficar mais claro, vamos tomar a afirmação “Todo inteiro cujo algarismo das unidades é zero é divisível por 2 e por 5”. Isso significa que um número que termina com zero, como o número 140, é divisível tanto por 2 quanto por 5. (SCHEINERMAN, 2006). Observe o Quadro 3.

Quadro 3. A e B

A	B	A e B
Verdadeira	Verdadeira	Verdadeira
Verdadeira	Falsa	Falsa
Falsa	Verdadeira	Falsa
Falsa	Falsa	Falsa

Fonte: Adaptado de Scheinerman (2006).

Quanto ao uso matemático do não, Scheinerman (2006) toma a afirmação "não A", que é verdadeira se, e somente se, A é falsa. Um exemplo mencionado pelo autor se refere aos números primos, como em: "Todos os primos são ímpares", que é falsa; assim, a afirmação "Nem todos os primos são ímpares" é verdadeira, o que nos leva ao Quadro 4.

Quadro 4. Não A

A	Não A
Verdadeira	Falsa
Falsa	Verdadeira

Fonte: Scheinerman (2006).

Já o uso do "ou" é um pouco diferente. Scheinerman (2006) explica que o "ou" em linguagem matemática admite a possibilidade de ambos os eventos acontecerem. Pensando na afirmação "A ou B", temos que A é verdadeiro, ou B é verdadeiro, ou ambos, A e B, são verdadeiros. Observe:

Suponhamos x e y inteiros com a propriedade $x|y$ e $y|x$. Então $x = y$ ou $x = -y$.

Nesse contexto, conforme Scheinerman (2006), podemos ter um dos seguintes casos:

- $x = y$, mas não $x = -y$ (por exemplo, tomar $x = 3$ e $y = 3$).
- $x = -y$, mas não $x = y$ (por exemplo, tomar $x = -5$ e $y = 5$).
- $x = y$ e $x = -y$, o que só é possível se $x = 0$ e $y = 0$.

O Quadro 5, a seguir, mostra afirmações "ou".

Quadro 5. A ou B

A	B	A ou B
Verdadeira	Verdadeira	Verdadeira
Verdadeira	Falsa	Verdadeira
Falsa	Verdadeira	Verdadeira
Falsa	Falsa	Falsa

Fonte: Adaptado de Scheinerman (2006).

Agora, vejamos algumas provas. Vamos provar a seguinte proposição: "A soma de dois inteiros pares é par".

Ou seja, vamos mostrar que:

$$\underbrace{\text{se } x \text{ e } y \text{ são inteiros pares}}_{\text{Hipótese}}\text{, então } \underbrace{x + y \text{ é um inteiro par}}_{\text{Tese}}$$

- Sejam x e y inteiros pares.
- Se ambos são pares, podemos dizer que eles são múltiplos de dois, ou seja, $x = 2k$ e $y = 2l$ ($k, l \in Z$).
- Sendo assim, $x + y = 2k + 2l = 2(k + l)$, ou seja, a soma de x com y é o dobro da soma de k com l.
- k e l são números inteiros, a soma de dois números inteiros continua sendo um número inteiro; então, podemos escrever que $x + y = 2c$ (com $c = k + l \in Z$), ou seja, $x + y$ é o dobro de um número inteiro; em outras palavras, 2 é um divisor de $x + y$. Assim, podemos concluir que: $x + y$ é par.

Agora, com a prova feita, temos um teorema: a soma de dois inteiros pares é par.

Existem algumas conjeturas que ainda não foram provadas, e uma delas é a conjetura de Goldbach, que diz que todo inteiro par maior do que 2 é a soma de dois primos. Já foram testados trilhões de números, e sempre se conseguiu mostrá-los como a soma de dois números primos, mas isso ainda não foi provado, está em aberto. Observe a exemplificação dessa conjetura de acordo com Scheinerman (2006).

Exemplo

Conjetura de Goldbach

Todo inteiro par maior do que 2 é a soma de dois primos.

Verifiquemos que essa afirmação é válida para os primeiros números pares. Temos:

$4 = 2 + 2$	$8 = 3 + 5$	$8 = 3 + 5$	$10 = 3 + 7$
$12 = 5 + 7$	$14 = 7 + 7$	$16 = 11 + 5$	$18 = 11 + 7$

Poderíamos escrever em um programa de computador para verificar que os primeiros bilhões de números pares (a começar de 4) são, cada um, a soma de dois primos. Isso implica que a conjetura de Goldbach seja verdadeira? Não! A evidência numérica torna a conjetura admissível, mas não prova que seja verdadeira. Até hoje não se conseguiu uma prova da conjetura de Goldbach e, assim, simplesmente não sabemos se ela é verdadeira ou falsa.

Vejamos a prova de mais uma proposição:

Sejam a, b, c e d inteiros. Se a divide b ($a|b$), b divide c ($b|c$), e c divide d($c|d$), então a divide d ($a|d$).

Como $a|b$, existe um inteiro x tal que $ax = b$.

Como $b|c$, existe um inteiro y tal que $by = c$.

Como $c|d$, existe um inteiro z tal que $cz = d$.

Note que $a(xyz) = (ax)(yz) = b(yz) = (by)z = cz = d$.

Por conseguinte, existe um inteiro $w = xyz$ tal que $aw = d$

Portanto, $a|d$.

Um exemplo de afirmação falsa é: “Os números primos são ímpares” — não é verdade, pois 2 é primo e não é ímpar.

Saiba mais

Você pode saber mais sobre a linguagem dos teoremas matemáticos e suas provas acessando o portal da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), que oferece conteúdo de qualidade, muito intuitivo e detalhado.

As definições que discutimos e tantas outras que existem são cruciais em matemática. De acordo com Hunter (2011), qualquer sistema matemático precisa começar com algumas suposições para que seja possível provar alguma sentença nova; portanto, é preciso ter um ponto de partida, sentenças nas quais se apoiar. Assim, é fundamental ter claro que as sentenças assumidas sem demonstração são chamadas de **postulados** ou **axiomas**, ou seja, um postulado é uma afirmação aceita como verdadeira sem qualquer prova e é usado como base para um argumento. Veja, a seguir, alguns exemplos de postulados (MIRANDA, 2008):

- Existem infinitos pontos no universo.
- Existem infinitos pontos em cada reta e fora dela.
- Para determinar uma reta, são necessários dois pontos distintos.
- Para determinar um plano, são necessários três pontos.

Vimos que, para provar uma conjectura, usamos métodos para demonstrá-las. As demonstrações por **exaustão** indicam que foram exauridos todos os casos possíveis para aquela conjectura, ou seja, foram esgotadas as possibilidades. É importante destacar que essa demonstração é utilizada somente quando o número de casos for finito e pequeno. Veja, a seguir, um exemplo.

Exemplo

Prove que se um inteiro entre 1 e 12 for divisível por 4, então ele também será divisível por 2.

Solução:

Número	Divisível por 4	Divisível por 2
1	Não	Não
2	Não	Não
3	Não	Não
4	Sim, pois $4 = 4 \times 1$	Sim, pois $4 = 2 \times 2$
5	Não	Não
6	Não	Não
7	Não	Não
8	Sim, pois $8 = 8 \times 1$	Sim, pois $8 = 2 \times 4$
9	Não	Não
10	Não	Não
11	Não	Não
12	Sim, pois $12 = 4 \times 3$	Sim, pois $12 = 2 \times 6$

Considerando que esse é um conjunto finito, esgotamos todas as possibilidades. Temos que os números 4, 8 e 12 são divisíveis por 4 e por 2. Logo, todos os números inteiros entre 1 e 12 que são divisíveis por 4 também são divisíveis por 2.

Já a demonstração por **contradição** é um pouco contraintuitiva. Por exemplo, para demonstrar a sentença A, supõe-se que a sua negação — não A ($\neg A$) — seja verdadeira e, a partir de uma demonstração direta, busca-se uma sentença que se saiba ser falsa (HUNTER, 2011). Veja o exemplo a seguir, extraído de Ferreira (2014).

Exemplo

Se n for par, então $n + 1$ será ímpar.

A negação é: "n é par e $n + 1$ é par".

Como n é par, existe um inteiro k tal que $n = 2k$.

Portanto, $n + 1 = 2k + 1$.

Como $n + 1$ também é par, existe um inteiro q tal que $2q = 2k + 1$.

Mas, $q = \frac{2k+1}{2} = k + \frac{1}{2}$.

Isso é uma contradição, pois a soma de um inteiro k e uma fração (no caso $\frac{1}{2}$ não é um inteiro).

Outro método que podemos utilizar é o da indução matemática ou, simplesmente, **indução**. Scheinerman (2006, p. 156-157) apresenta o seguinte teorema e sua prova:

"Seja A um conjunto de números naturais".

Se $0 \in A$ e

$\forall k \in \mathbb{N}, k \in A \rightarrow k + 1 \in A$,

Então $A = \mathbb{N}$.

Essas duas condições afirmam que o zero está no conjunto A e sempre que um número natural k está em A, $k + 1$ também está em A. A única maneira como essas duas condições podem ser satisfeitas é que A seja todo o conjunto dos números naturais. Vejamos a **prova**.

Suponhamos, por contradição, que $A \neq \mathbb{N}$. Seja $x = \mathbb{N} - A$, isto é, x é o conjunto dos números naturais que não estão em A. Nossa suposição de que $A \neq N$ significa que existe um número natural não está em A, isto é, $x \neq \emptyset$. Como x é um conjunto não vazio de números naturais, sabemos que x contém um elemento mínimo x. Assim, x é o menor número natural fora de A.

Note que $x \neq 0$ porque sabemos que $0 \in A$, de forma que $0 \notin X$. Portanto, $x \geq 1$. Assim, $x - 1 \geq 0$, de modo que $x - 1 \in \mathbb{N}$. Além disso, como x é o menor elemento fora de A, temos que $x - 1 \in A$.

Já a segunda condição do teorema afirma que, sempre que um número natural está em A, o número natural imediatamente superior também está. Como $x - 1 \in A$, sabemos que $(x - 1) + 1 = x$ também está em A. Mas $x \notin A$.

A seguir, aprofundaremos o estudo de lógica matemática por meio da solução de problemas.

3 A solução de problemas a partir da lógica

Nesta seção, você vai conhecer a solução de problemas a partir da lógica e, para tanto, será importante relembrar os conhecidos diagramas de Venn, que nos auxiliam nessas resoluções. O diagrama de Venn é uma forma gráfica de representar os elementos de um conjunto. Por exemplo, para o conjunto A = {1,2,3,4,5,6}, a representação seria a que você confere na Figura 1.

Figura 1. Representação do diagrama de Venn para o conjunto A.

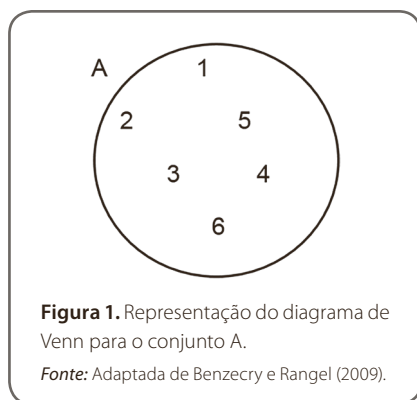
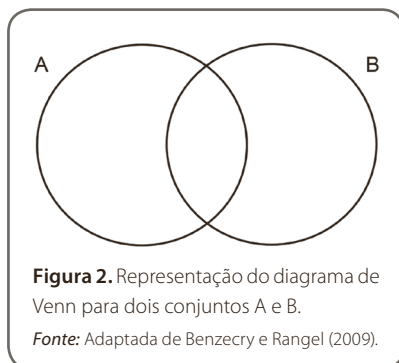
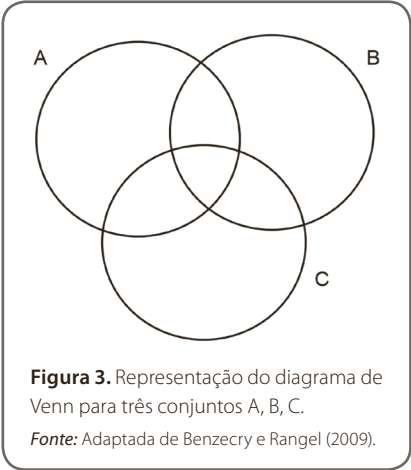
Fonte: Adaptada de Benzecry e Rangel (2009).

Além disso, outras representações para o diagrama de Venn que podem ser úteis para a solução de problemas envolvem dois e três conjuntos, como você vê nas Figura 2 e 3.

Figura 2. Representação do diagrama de Venn para dois conjuntos A e B.

Fonte: Adaptada de Benzecry e Rangel (2009).

Figura 3. Representação do diagrama de Venn para três conjuntos A, B, C.

Fonte: Adaptada de Benzecry e Rangel (2009).

Saiba mais

Você pode saber mais sobre conjuntos, desde os conceitos iniciais, representações, diagramas de Venn até as operações com conjuntos, consultando a parte I da obra *Como desenvolver o raciocínio lógico: soluções criativas na teoria dos conjuntos*, de Benzecry e Rangel (2009).

Vejamos, a seguir, exemplos de problemas envolvendo raciocínio lógico propostos por Benzecry e Rangel (2009).

Exemplo 1

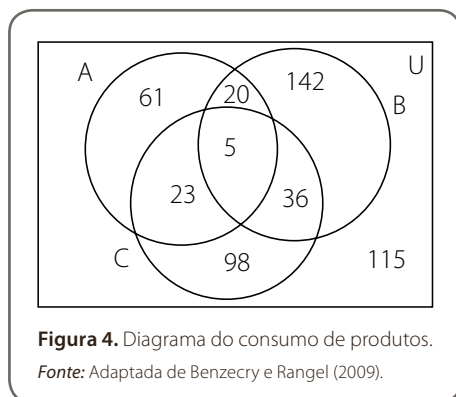
Em uma cidade, são consumidos três produtos — A, B e C. Feita uma pesquisa de mercado sobre o consumo desses produtos, foram colhidos os seguintes resultados:

Produtos	A	B	C	A e B	B e C	C e A	A, B e C	Nenhum dos três produtos
Nº de consumidores	109	203	162	25	41	28	5	115

A partir disso, determine:

a) o número de pessoas que foram consultadas.
b) o número de pessoas que consomem só o produto A.
c) o número de pessoas que consomem só o produto B.
d) o número de pessoas que não consomem o produto A ou o produto C.
e) o número de pessoas que consomem pelo menos dois produtos.

Para solucioná-lo, interpretando o quadro que acompanha no enunciado, representaremos A, B, C e U no diagrama a seguir, indicando em cada região a quantidade de pessoas que consomem ou não os produtos.

Figura 4. Diagrama do consumo de produtos.
Fonte: Adaptada de Benzecry e Rangel (2009).

Iniciamos indicando o número de elementos de $A \cap B \cap C$, que é 5. Depois, sabendo o número de elementos de $A \cap B$, de $B \cap C$ e de $A \cap C$, descobrimos o número de elementos de $(A \cap B) - C$, de $(B \cap C) - A$ e de $(A \cap C) - B$, que são, respectivamente, $25 - 5 = 20$, $41 - 5 = 36$ e $28 - 5 = 23$. Analogamente, descobrimos o número de elementos apenas de A, que é $109 - (25 + 23) = 61$, apenas de B, que é $203 - (25 + 36) = 142$, e apenas de C, que é $162 - (28 + 36) = 98$. Note que $n(\overline{A \cup B \cup C}) = 115$ é o número de pessoas consultadas que não usam nenhum dos três produtos.

Logo, observando o diagrama:

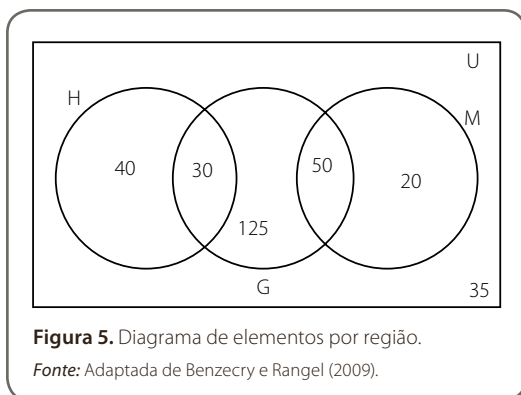
a) 500
b) 61
c) 142
d) 257 = 142 + 115. Note que esse conjunto é o complementar da união de A e C, isto é, $C_U(A \cup C)$.
e) 84 = 20 + 5 + 23 + 36

Exemplo 2

Em um grupo de 300 alunos, 70 gostam de história, 30 gostam de história e geografia, 50 gostam de geografia e matemática e 35 não gostam de nenhuma das três matérias. Sabendo que ninguém gosta de história e de matemática e que o número de alunos que gostam de história é igual ao número daqueles que gostam de matemática, determine:

a) o número de alunos que gostam só de matemática;
b) o número de alunos que gostam só de geografia;
c) o número de alunos que gostam de apenas duas disciplinas.

Solução: pelo enunciado e considerando U o universo dos 300 alunos, H o conjunto dos alunos que gostam de história, G o conjunto dos alunos que gostam de geografia e M o conjunto dos alunos que gostam de matemática, temos o seguinte diagrama (Figura 5), no qual indicaremos o número de elementos de cada região.

Figura 5. Diagrama de elementos por região.
Fonte: Adaptada de Benzecry e Rangel (2009).

Note que não usamos a representação geral de três conjuntos, pois temos situações específicas para esses conjuntos. Observe que $H \cap M = \emptyset$. Iniciamos utilizando as informações de $n(H \cap G) = 30$, $n(G \cap M) = 50$ e $n(C_U(H \cup G \cup M)) = 35$.

Como $n(H) = 70$, temos que $70 - 30 = 40$ é o número de alunos que gostam só de história.

Como $n(H) = n(M)$, temos que $70 - 50 = 20$ é o número de alunos que gostam só de matemática.

Por último, o número de alunos que gostam só de geografia pode ser calculado da seguinte forma: $300 - (70 + 70 + 35) = 125$.

Logo, pelo diagrama:

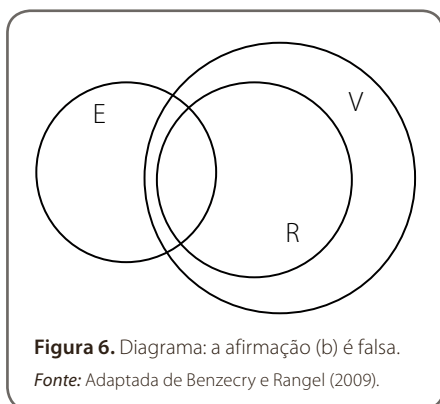
a) 20
b) 125
c) 80 = 30 + 50

Exemplo 3

Considerando as afirmações "Existem europeus que são ricos" e "Todos os homens ricos viajam muito", é correto afirmar que:

a) existem europeus que viajam muito.
b) todos os europeus viajam muito.

Solução: para resolver essa questão, vamos representar as sentenças em um único diagrama. Seja E o conjunto dos europeus, R o conjunto dos ricos e V o conjunto dos que viajam muito. Inicialmente, mostraremos por meio do diagrama (Figura 6) que o item (b) é falso.

Figura 6. Diagrama: a afirmação (b) é falsa.
Fonte: Adaptada de Benzecry e Rangel (2009).

Note que a representação anterior satisfaz as afirmações: "Existem europeus que são ricos" e "Todos os homens ricos viajam muito". Porém, não satisfaz a afirmação "Todos os europeus viajam muito". Para demonstrar com rigor que o item (a) é correto, vamos analisar as afirmações a seguir.

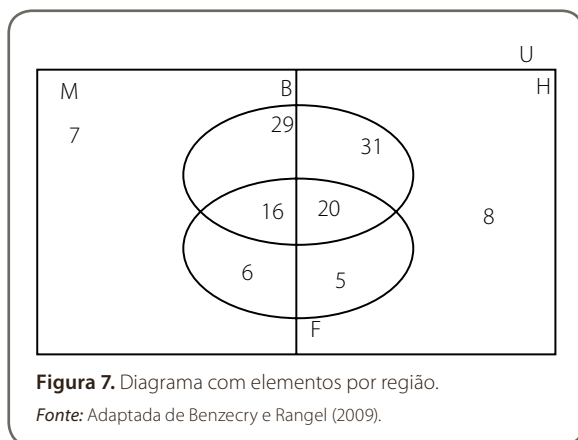
- "Todos os homens ricos viajam muito" — temos que $R \subset V$,
- "Existem europeus que são ricos" — temos que $E \cap R \neq \emptyset$, isto é, existem europeus que são ricos, portanto, eles pertencem ao conjunto dos que viajam muito.

Exemplo 4

Em um avião encontravam-se 122 passageiros, sendo 96 brasileiros, 64 homens, 47 fumantes, 51 homens brasileiros, 25 homens fumantes, 36 brasileiros fumantes e 20 homens brasileiros fumantes. Calcule:

a) O número de mulheres brasileiras não fumantes.
b) O número de homens fumantes não brasileiros.
c) O número de mulheres fumantes.

Solução: interpretando o enunciado, considerando U o universo dos 122 passageiros, H o conjunto dos homens, M o conjunto das mulheres, B o conjunto dos brasileiros e F o conjunto dos fumantes, indicaremos no diagrama da Figura 7 o número de elementos de cada região.

Figura 7. Diagrama com elementos por região.
Fonte: Adaptada de Benzecry e Rangel (2009).

Note que representamos esses quatro subconjuntos de *U* levando em conta que *M* e *H* formam uma partição de *U*. Iniciamos utilizando a informação $n(H \cap B \cap F) = 20$. Logo:

- $n(B \cap F) = 36 \rightarrow n(M \cap B \cap F) = 36 - 20 = 16$
- $n(H \cap F) = 25 \rightarrow n(H \cap F \cap \overline{B}) = 25 - 20 = 5$
- $n(H \cap B) = 51 \rightarrow n(H \cap B \cap \overline{F}) = 51 - 20 = 31$
- $n(F) = 47 \rightarrow n(F \cap M \cap \overline{B}) = 47 - (16 + 20 + 5) = 6$
- $n(H) = 64 \rightarrow n(H - (B \cup F)) = 64 - (51 + 5) = 8$
- $n(B) = 96 \rightarrow n(M \cap B \cap \overline{F}) = 96 - (16 + 20 + 31) = 29$

Por último, o número de passageiros mulheres que não são brasileiras e nem fumam pode ser calculado da seguinte forma: $122 - (29 + 16 + 6 + 64) = 7$.

Logo, observando o diagrama:

a) 29
b) 5
c) 22

Neste capítulo, você viu conceitos básicos sobre lógica matemática, conhecendo sua linguagem e interação com a matemática e estudando alguns de seus operadores e provas de teoremas. Além disso, os problemas que foram apresentados e solucionados detalhadamente oferecem subsídios para praticar e buscar novos problemas.

Referências

BENZECRY, V. S. J.; RANGEL, K. A. *Como desenvolver o raciocínio lógico*: soluções criativas na teoria dos conjuntos. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

CARVALHO, M. *Introdução à lógica matemática*. [201-?]. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=153#. Acesso em: 19 jul. 2020.

FERREIRA, G. S. *As provas mais usuais em matemática*. 2014. 43 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) — Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2014. Disponível em: http://www2.uesb.br/cursos/matematica/matematicavca/wp-content/uploads/GRAZIELE-MONOGRAFIA-VERS%C3%83O-FINAL.pdf. Acesso em: 19 jul. 2020.

HUNTER, D. J. *Fundamentos da matemática discreta*. Tradução: Paula Porto Martins. Revisão técnica: Jairo da Silva Bochi. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

MACHADO, N. J.; CUNHA, M. O. de. *Lógica e linguagem cotidiana*: verdade, coerência, comunicação, argumentação. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

MIRANDA, D. de. *Axiomas e postulados*. 2008. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/axiomas-postulados.htm. Acesso em: 21 jul. 2020.

SCHEINERMAN, E. R. *Matemática discreta*: uma introdução. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

Leitura recomendada

GOUVEIA, R. *Lógica matemática*. 2018. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/logica-matematica/. Acesso em: 19 jul. 2020.

Fique atento

Os *links* para *sites* da *web* fornecidos neste capítulo foram todos testados, e seu funcionamento foi comprovado no momento da publicação do material. No entanto, a rede é extremamente dinâmica; suas páginas estão constantemente mudando de local e conteúdo. Assim, os editores declaram não ter qualquer responsabilidade sobre qualidade, precisão ou integralidade das informações referidas em tais *links*.

DICA DO PROFESSOR

No vídeo a seguir, discutimos a lógica matemática, tão importante para provar teoremas. Veja como comprovar teoremas: um algébrico com um erro proposital, outro com argumentação, além disso, o Teorema de Pitágoras simplesmente com geometria, método muito utilizado antes da invenção da álgebra.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

EXERCÍCIOS

1) É interessante perceber que a matemática é uma linguagem e que, pelo menos, uma parte da informação pode ser ordenada por meio da lógica matemática. Sendo assim, aponte qual dessas áreas NÃO pode usar a lógica matemática para obter ordenamento de informações.

A) Física.

B) Biologia e medicina.

C) Computação.

D) Química.

E) Todas as alternativas podem usar a lógica matemática em algum ponto do seu escopo de conhecimento.

2) Se um conjunto de números inteiros mais uma operação que faz:
a(+)b=a+b+1, sendo " a " e " b " números genéricos do conjunto de números inteiros, (+) a operação definida pelo lado direito da igualdade, ao passo que o " + " é o habitual da matemática elementar, diga quanto vale a expressão: 3(+)9+2(+)0.

A) 16

B) 14

C) 15

D) a+b+1

E) a(+)b

3) **Sabendo que $(e+d)^2=e^2+2ed+d^2$ e que um polinômio de grau 2 é descrito por $ax^2+bx+c=y$.**
Ache a expressão que dá o(s)s valor(es) de x quando y=0.

A) x=(-c/x - b)/a
Aqui não se usou a primeira relação e não se achou uma expressão para "x", pois há "x" nos dois lados da equação.

B) $(e+d)^2=e^2+2ed+d^2$

C) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a}$

D) $a^2+b^2=c^2+x^2$

E) $x = \pi(a + b + c)^2$

4) **Na lógica, afirmações do tipo “Se A, então B”, “A se e somente se B”, “A e B”, “A ou B” e “Não A” são muito utilizadas nas demonstrações. Considere A: “O número 2 é ímpar e B: “o triângulo possui 3 lados” e marque a alternativa correta**

A) Na afirmação, “Se A então B” a afirmação “o número 2 é ímpar” é chamada tese

B) Na afirmação, “Se A então B” a afirmação “o triângulo possui 3 lados” é chamada hipótese

C) A afirmação “A ou B” é falsa

D) A afirmação “Não A” é verdadeira

E) A afirmação “A e B” é verdadeira

5) Uma universidade fez uma pesquisa com alguns alunos sobre suas preferências de estudo nas disciplinas de matemática. Dos 400 alunos consultadas, apurou-se o seguinte

–Ao todo, 150 alunos consultados estudam somente resolvendo exercícios.

–O número de alunos consultados que estudam assistindo videoaulas foi 240.

–Apenas 60 dentre os alunos consultadas estudam das duas maneiras.

Qual é o número de alunos consultados que estuda assistindo videoaulas, mas não faz exercícios:

A) 10

B) 40

C) 150

D) 210

E) 180

NA PRÁTICA

A Lógica Matemática pode ser entendida como o estudo matemático de linguagens definidas de forma precisa, ou seja, através dela é possivel traduzir matematicamente frases ou sentenças proferidas por uma pessoa e provar que uma sentença é verdadeira.

Acompanhe na imagem abaixo, um exemplo prático de como essa linguagem é aplicada na tecnologia.

VOCÊ SABIA QUE A LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO É TRADUZIDA PELA LÓGICA MATEMÁTICA?

A programação lógica é responsável por transpor o estilo da lógica matemática à programação de computadores. Através dela é possível solucionar problemas, formular novas hipóteses e testar teorias.

A lógica matemática permite saber se algo é verdadeiro ou falso.

Seu processo de demonstração é bem conhecido, portanto é um meio confiável de responder perguntas.

Além disso, sistemas de programação lógica automatizam este processo, permitindo o avanço da inteligência artificial que, por sua vez, influencia no desenvolvimento da programação lógica.

SAIBA MAIS

Para ampliar o seu conhecimento a respeito desse assunto, veja abaixo as sugestões do professor:

Curiosidade: absurdos matemáticos.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Fórmula da soma dos termos de uma PA finita

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Lógica: condicional (simplificado).

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!